MATHEMATICS SOLUTIONS

61. (c) माना $y = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)}$

$\Rightarrow \quad y(x-c) = x^2 - (a+b)x + ab$

$\Rightarrow \quad x^2 - (a+b+y)x + ab + cy = 0$

अब, $\quad D = (a+b+y)^2 - 4(ab+cy)$

$= y^2 + 2y(a+b-2c) + (a-b)^2$

चूँकि x वास्तविक है तथा y के मान वास्तविक हैं, तब $D \geq 0, \forall\, y \in R$ द्विघात समीकरण में y का चिह्न पहले पद की भाँति ही है यदि $B^2 - 4AC < 0$

$\Rightarrow \quad 4(a+b-2c)^2 - 4(a-b)^2 < 0$

$\Rightarrow \quad 4(a+b-2c+a-b)(a+b-2ca+b) < 0$

$\Rightarrow \quad 16(a-c)(b-c) < 0$

$\Rightarrow \quad 16(a-c)(c-b) =$ ऋणात्मक

$\therefore$ a व b के बीच c स्थित है अर्थात् $a < c < b$ ...(i)

जहाँ, $a < b$ परन्तु यदि $b < a$, तब उपरोक्त प्रतिबन्ध निम्न होगा

$a > c > b$ ...(ii)

अतः समी (i) व (ii) से स्पष्ट है कि विकल्प (d) सही है।

62. (c) माना दी गई समीकरण के मूल α व β हैं।

$$x^2 + (2+\lambda)x - \frac{1}{2}(1+\lambda) = 0$$

$\Rightarrow \quad \alpha + \beta = -(2+\lambda)$ तथा $\alpha\beta = -\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)$

अब, $\quad \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$\Rightarrow \quad \alpha^2 + \beta^2 = [-(2+\lambda)]^2 + 2\frac{(1+\lambda)}{2}$

$\Rightarrow \quad \alpha^2 + \beta^2 = \lambda^2 + 4 + 4\lambda + 1 + \lambda = \lambda^2 + 5\lambda + 5$

इसका मान न्यूनतम होगा, यदि $\lambda = \frac{1}{2}$

63. (c) हम जानते हैं कि $ax^2 + bx + c \geq 0$, यदि $a > 0$ तथा $b^2 - 4ac \leq 0$

अब, $\quad mx - 1 + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{mx^2 - x + 1}{x} \geq 0$

$\Rightarrow \quad mx^2 - x + 1 \geq 0$ तथा $x > 0$

अब, $mx^2 - x + 1 \geq 0$ यदि $m > 0$ तथा $1 - 4m \leq 0$ या यदि $m > 0$ तथा $m \geq \frac{1}{4}$

अतः $\quad m$ का निम्निष्ठ मान $\frac{1}{4}$ है।

64. (c) मूल वास्तविक होने के लिए $D \geq 0$

$\Rightarrow \quad q^2 - 4p \geq 0 \Rightarrow q^2 \geq 4p$

$p = 1$ के लिए, $q^2 \geq 4 \Rightarrow q = 2, 3, 4$

$p = 2$ के लिए, $q^2 \geq 8 \Rightarrow q = 3, 4$

$p = 3$ के लिए, $q^2 \geq 12 \Rightarrow q = 4$

$p = 4$ के लिए, $q^2 \geq 16 \Rightarrow q = 4$

अतः कुल सात हल सम्भव हैं।

65. (a) चूँकि समीकरणों $ax^2 + 2bx + c = 0$ व $px^2 + 2qx + r = 0$ के मूल क्रमशः α, β व γ, δ हैं, तब

$$\alpha + \beta = -\frac{2b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}, \gamma + \delta = -\frac{2q}{p}, \gamma\delta = \frac{r}{p}$$

$\because \alpha, \beta, \gamma$ व δ गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

$\therefore \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ ...(i)

परन्तु $\quad \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} = \frac{pc}{ar} \Rightarrow \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^2 = \frac{pc}{ar}$ [समी (i)से]

तथा $\quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} = \frac{\beta}{\delta}$

$\Rightarrow \quad \frac{bp}{aq} = \sqrt{\frac{pc}{ar}} \Rightarrow \frac{b^2p^2}{a^2q^2} = \frac{pc}{ar} \Rightarrow q^2ac = b^2pr$

66. (c) चूँकि समीकरणों $ax^2 + bx + c = 0$ व $Ax^2 + Bx + C = 0$ के मूल क्रमशः α, β व $\alpha - k, \beta - k$ हैं।

$\Rightarrow \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$

तथा $\quad \alpha + \beta - 2k = -\frac{B}{A}, (\alpha - k)(\beta - k) = \frac{C}{A}$

अब, $\quad (\alpha - \beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{(b^2 - 4ac)}{a^2}$ ...(i)

तथा $\{(\alpha - k) - (\beta - k)\}^2 = \{(a - k) + (\beta - k)\}^2 - 4(\alpha - k)(\beta - k)$

$$= \left(-\frac{B}{A}\right)^2 - 4\left(\frac{C}{A}\right) = \frac{B^2 - 4AC}{A^2} \quad ...(ii)$$

समी (i) व (ii) से,

$$\frac{(b^2 - 4ac)}{a^2} = \frac{B^2 - 4AC}{A^2}$$

$$\therefore \quad \frac{B^2 - 4AC}{b^2 - 4ac} = \left(\frac{A}{a}\right)^2$$

67. (d) चूँकि दी गई समीकरण के मूल α व β हैं।

माना $\quad f(x) = a^2x^2 + 2bx + 2c = 0$

तब, $\quad f(\alpha) = a^2\alpha^2 + 2b\alpha + 2c = 0$

$= a^2\alpha^2 + 2(b\alpha + c) = a^2\alpha^2 - 2a^2\alpha^2$

$= -a^2\alpha^2 =$ ऋणात्मक

तथा $\quad f(\beta) = a^2\beta^2 + 2(b\beta + c) = a^2\beta^2 + 2a^2\beta^2$

$= 3a^2\beta^2 =$ धनात्मक

चूँकि $f(\alpha)$ व $f(\beta)$ विपरीत चिह्न के हैं, इसलिए समीकरण सिद्धान्त से समीकरण $f(x) = 0$ का एक मूल γ, α व β के बीच होगा अर्थात् $\alpha < \gamma < \beta$

68. (d) चूँकि, $\quad y^2 - y + a = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{4}$ तथा $-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$, दी गई समीकरण के पास y के किसी भी मान के लिए x का कोई भी वास्तविक मान नहीं होगा। यदि

$$a - \frac{1}{4} > \sqrt{2}$$

अतः $\quad a \in \left(\sqrt{2} + \frac{1}{4}, \infty\right)$

$\Rightarrow \quad a \in (\sqrt{3}, \infty) \left(\because \sqrt{2} + \frac{1}{4} < \sqrt{3}\right)$

69. (b) माना समीकरण $x^2 - ax + b = 0$ के मूल α व β हैं।

$\therefore \quad \alpha + \beta = a$ ...(i)

तथा $\quad \alpha\beta = b$ ...(ii)

मूल अभाज्य संख्याएँ हैं। इसलिए स्पष्टतः b अभाज्य संख्या नहीं होगी क्योंकि यह दो अभाज्य संख्याओं का गुणनफल है। दो अभाज्य संख्याओं का योग एक दशा के अतिरिक्त सभी में सम संख्या होता है। a अभाज्य संख्या या भाज्य संख्या हो सकता है।

अब, $\quad 1 + a + b = 1 + \alpha\beta + \alpha + \beta = (1+\alpha)(1+\beta)$

$(1+\alpha), (1+\beta)$ भाज्य या अभाज्य संख्याएँ हो सकती हैं। इसलिए $1 + a + b$ निश्चित नहीं है।

70. (b) माना समीकरणों $x^2 + b_1x + c_1 = 0$ तथा $x^2 + b_2x + c_2 = 0$ के विविक्तकर D_1 व D_2 है।

$D_1 + D_2 = b_1^2 - 4c_1 + b_2^2 - 4c_2$

$= (b_1^2 + b_2^2) - 4(c_1 + c_2)$

$= b_1^2 + b_2^2 - 2b_1b_2 \quad [\because b_1b_2 = 2(c_1 + c_2)]$

$= (b_1 - b_2)^2 \geq 0$

$\Rightarrow \quad D_1 \geq 0$ या $D_2 \geq 0$

$\Rightarrow D_1$ व D_2 दोनों धनात्मक हैं।

71. (c) $(x-1)(x^2-5x+7)<(x-1)$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2-5x+6)<0$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x-2)(x-3)<0$

$\therefore \quad x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3)$

72. (c) $x^2-3|x|+2<0$

$\Rightarrow \quad |x|^2-3|x|+2<0$

$\Rightarrow \quad (|x|-1)(|x|-2)<0$

$\Rightarrow \quad 1<|x|<2$

$\Rightarrow \quad -2<x<-1$ या $1<x<2$

$\therefore \quad x \in (-2,-1) \cup (1,2)$

73. (b) दिया है, ${}^5P_r = 2\, {}^6P_{r-1}$

$$\frac{5!}{(5-r)!} = 2 \times \frac{6!}{(6-r+1)!} \qquad \left\{\because {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}\right\}$$

$\Rightarrow \quad \frac{5!}{(5-r)!} = 2 \times \frac{6 \times 5!}{(7-r)!}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{(5-r)!} = \frac{12}{(7-r)(6-r)(5-r)!}$

$\Rightarrow \quad (7-r)(6-r)=12$

$\Rightarrow \quad 42-7r-6r+r^2=12$

$\Rightarrow \quad r^2-13r+30=0$

$\Rightarrow \quad r^2-10r-3r+30=0$

$\Rightarrow \quad r(r-10)-3(r-10)=0$

$\Rightarrow \quad (r-10)(r-3)=0$

$r=10, 3$ यहाँ, $r=10$ अमान्य है चूँकि $0 \le r \le 5$

अतः $r=3$

74. (a) शब्द PERMUTATIONS में अक्षर निम्न प्रकार आए हुए हैं

P — 1 बार
E — 1 बार
R — 1 बार
M — 1 बार
U — 1 बार
T — 2 बार
A — 1 बार
I — 1 बार
O — 1 बार
N — 1 बार
S — 1 बार

(i) शब्द जिनका प्रारम्भ P से तथा अन्त S से हो अर्थात्

P □ .. □ .. □ .. □ .. □ .. □ .. □ .. □ .. □ .. □ .. S

प्रथम तथा अन्तिम स्थान क्रमशः P तथा S से भरे जाएँगे, तब बचे हुए 10 स्थान भरे जाने के तरीकों की संख्या $= \frac{10!}{2!}$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!}$$

$= 720 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$

$= 720 \times 2520 = 1814400$

75. (c) अभीष्ट तरीके $= \frac{4!}{2!2!} = \frac{5!}{2!3!} = 60$

76. (a) संख्या सम होगी यदि इकाई का अंक 2, 4, 6 या 8 हो अर्थात् अन्तिम अंक (इकाई का अंक) 4 तरीकों से भरा जा सकता है तथा शेष अंकों को ${}^8P_2$ तरीकों से भरा जा सकता है

तीन भिन्न अंकों वाली संख्याओं की संख्या $= {}^8P_2 \times 4 = 224$

77. (c) 9 अलग-अलग अंकों से, 9 अंक की कुल बनी संख्या $= 9 \times {}^9P_8$

$$= \frac{9 \times 9!}{1!} = 9 \times 9!$$

78. (b) ARTICLE शब्द में AEI स्वर तथा C, L, R, T व्यंजन हैं। सात अक्षरों के शब्द में तीन सम स्थान हैं जिसमें 3 स्वर 31 तरीकों से भरा जा सकता है। शेष चार स्थानों में चार व्यंजन 4! तरीकों से भरा जा सकता है।

$\therefore$ अभीष्ट तरीकों की संख्या $= 3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$

79. (a) दो महिलाएँ 1 से 4 कुर्सियों को ${}^4P_2$ तरीके से भर सकती हैं तथा 3 पुरुष शेष कुर्सियों को ${}^6P_3$ तरीके से भर सकता है।

$\therefore \quad$ अभीष्ट तरीके $= {}^4P_2 \times {}^6P_3$

$= 12 \times 120$

$= 1440$

80. (c) शब्द RACHIT में A, C, H, I से प्रारम्भ होने वाले शब्दों की संख्या 6! है तथा अलग शब्द RACHIT है।

$\therefore$ अभीष्ट शब्दों की संख्या $= 4 \times 5! + 1$

$= 4 \times 120 + 1$

$= 480 + 1 = 481$

81. (c) शब्द TRIANGLE में स्वर (A, E, I) तथा व्यंजन (G, L, N, R, T) है। सबसे पहले व्यंजन को अलग-अलग जगहों पर स्थिर करने के तरीके $= 5!$ शेष जगहों को तीन स्वरों द्वारा ${}^6P_3$ तरीके से भरा जा सकता है।

$\therefore$ कुल शब्दों की संख्या $= 5! \times {}^6P_3$

$= 120 \times 6 \times 5 \times 4 = 14400$ तरीके

82. (c) कुल अंकों की संख्या $= 4$

$\therefore$ चार अंकों की कुल संख्याएँ

$= {}^4P_4 = 4!$

$= 24$

83. (b) कुल बनी संख्याओं के इकाई के अंकों का योग

$= 3!(3+4+5+6)$

$= 6 \times 18 = 108$

84. (b) दिया है, $|z+4| \le 3 \Rightarrow -3 \le z+4 \le 3$

$\Rightarrow \quad -6 \le z+1 \le 0$

$\Rightarrow \quad 0 \le -(z+1) \le 6$

$\Rightarrow \quad 0 \le |z+1| \le 6$

अतः $|z+1|$ के उच्चतम तथा निम्नतम मान क्रमशः 6 तथा 0 हैं।

85. (a) हम जानते हैं कि, $\quad |-z| = |z|$

तथा $\quad |z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$

अब, $\quad |z| + |z-1| = |z| + |1-z|$

$\ge |z+(1-z)| = |1| = 1$

अतः $|z| + |z-1|$ का निम्नतम मान 1 है

86. (d) हम जानते हैं कि $|z+a| \le a$ निरूपित करता है कि z, a त्रिज्या वाले तथा $(-a, 0)$ केन्द्र वाले वृत्त पर या वृत्त के अन्दर स्थित है, तब

$|z_1| + |z_2| + |z_3| \le 14$

87. (b) $\left|z+\frac{2}{z}\right| = 2 \Rightarrow |z| - \frac{2}{|z|} \le 2$

$\Rightarrow \quad |z|^2 - 2|z| - 2 \le 0$

जो $|z|$ में द्विघात समीकरण है

$\therefore \quad |z| \le \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} \le 1 \pm \sqrt{3}$

अतः $|z|$ का उच्चतम मान $1+\sqrt{3}$ है।

88. (*c*) दिया है, $|z_1 - 1| < 1$

$\Rightarrow$ $|z_1| - |1| < 1$ ($\because$ त्रिभुजीय असमिका के अनुसार)

$\Rightarrow$ $|z_1| < 2$ ...(i)

इसी प्रकार, $|z_2 - 2| < 2$

$\Rightarrow$ $|z_2| < 4$ ...(ii)

तथा $|z_3 - 3| < 3$

$\Rightarrow$ $|z_3| < 6$ ...(iii)

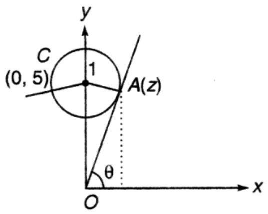
$\Rightarrow$ $|z_1| + |z_2| + |z_3| < 12$ ...(iv)

त्रिभुजीय असमिका का प्रयोग करने पर,

$$|z_1 + z_2 + z_3| \le |z_1| + |z_2| + |z_3|$$

$\Rightarrow$ $|z_1 + z_2 + z_3| < 12$ [समी (iv) से]

89. (*a*) दिया है, $OC = 5$ तथा $CA = 1$



स्पष्टतः बिन्दु z इस प्रकार है कि मूलबिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखा और वृत्त के स्पर्श बिन्दु के कोणांक का मान न्यूनतम है।

माना $\theta = \angle AOX$, तब $\angle AOC = 90° - \theta$

चित्र से, $\sin \angle AOC = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow$ $\sin(90° - \theta) = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow$ $\cos \theta = \frac{1}{5}$

अब, $OA = \sqrt{OC^2 - CA^2}$

$= \sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{24}$

अब, A के निर्देशांक $(\sqrt{24} \cos \theta, \sqrt{24} \sin \theta)$ हैं

अर्थात् $\left(\frac{\sqrt{24}}{5}, \frac{24}{5}\right)$

अतः $z = \frac{2\sqrt{6}}{5} + i\frac{24}{5}$

90. (*d*) $\frac{4(\cos 75° + i \sin 75°)}{0.4(\cos 30° + i \sin 30°)}$

$= 10(\cos 75° + i \sin 75°)(\cos 30° - i \sin 30°)$

$= 10e^{75i} \cdot e^{-30i} = 10e^{45i}$

$= 10(\cos 45° + i \sin 45°) = \frac{10}{\sqrt{2}}(1 + i)$